Arabescos y Geometría

Antonio F. Costa

Simetría.

Una figura geométrica es simétrica si existe una transformación o movimiento, que se llama simetría, de modo que deja a la figura entera sin alteración pero que puede intercambiar sus partes entre sí. Con otras palabras: una figura es simétrica si podemos aplicar un movimiento que deja la figura invariante y tal movimiento es una simetría. En estas páginas nos vamos a ocupar de las simetrías de los arabescos.
El concepto de simetría no sólo se restringe a las figuras geométricas sino que aparece en otros muchos lugares de las ciencias y de las artes. En Física, Matemáticas, Química, Biología y Geología la simetría ha desempeñado y desempeña un papel muy importante. Así por ejemplo en Matemáticas un matemático célebre del siglo XX (E. Artin) decía "de la investigación de las simetrías de una estructura matemática dada han surgido siempre los resultados más poderosos", o para todas las ciencias citamos el famosísimo principio de simetría de Pierre Curie: "cuando ciertas causas producen ciertos efectos, los elementos de simetría en las causas deberían reaparecer en los efectos producidos".
En estas páginas vamos a exponer una introducción al estudio de las simetrías que aparecen al observar los arabescos de la Alhambra u otros motivos decorativos parecidos. Por tanto las simetrías que estudiaremos aquí son movimientos del plano cuya clasificación en rotaciones, traslaciones, reflexiones, reflexiones sesgadas e identidad se ha expuesto brevemente en el vídeo.
También se ha observado en el documental que si tenemos dos simetrías de un objeto, S y T, al realizar sucesivamente S y después T obtenemos otra transformación que también es una simetría, así se tiene un producto de simetrías y una estructura algebraica sobre el conjunto de simetrías de dicho objeto. Una forma de estudiar, desde un punto de vista matemático, las simetrías de una figura es clasificando la estructura algebraica que posee el conjunto de todas sus simetrías. La estructura algebraico-matemática que poseen las simetrías de una figura es una estructura de *grupo*.
Por ejemplo para las figuras del plano (que no se extienden indefinidamente, como los arabescos) los grupos finitos de simetrías fueron estudiados por Leonardo da Vinci y son de dos tipos cuya estructura algebraica es esencialmente distinta: cíclicos (con solo rotaciones y generados por un elemento) y diédricos (con rotaciones y reflexiones; que necesitan dos generadores), después en cada tipo también hay un número infinito de posibilidades. Para los frisos del plano (decoraciones que suponemos se extienden de modo indefinido pero paralelamente a una recta) hay exactamente siete de grupos de simetría posibles. Nosotros nos ocuparemos de los tipos de grupos de simetrías de los arabescos.

Grupos de simetrías de arabescos o grupos cristalográficos planos.

Ciertos diseños de arabescos, alicatados, mosaicos, papeles pintados o alfombras nos sugieren como extenderlos sin límites a todo el plano. Una vez nosotros tenemos un

motivo geométrico que ocupa todo el plano, al menos en nuestra imaginación, entonces dicho motivo puede presentar simetrías que son traslaciones. Los arabescos que vamos a estudiar serán aquellos que al considerarlos como extendidos a todo el plano tienen simetrías que son traslaciones, además supondremos que las simetrías que son traslaciones se obtienen por sucesivos productos de dos traslaciones originales, estas dos traslaciones originales tendrán vectores que no son paralelos. Es decir los movimientos que son traslaciones en los grupos de simetrías de arabescos se obtienen efectuando varias veces dos traslaciones cuyos vectores no están en rectas paralelas. Estos grupos de simetrías de arabescos se llaman grupos cristalográficos planos.
El objetivo de esta documentación es enseñar a clasificar y estudiar los grupos de simetrías de los arabescos. Hay 17 tipos posibles de grupos de simetrías de arabescos o grupos cristalográficos (grupos de simetrías de papeles pintados, "wallpaper symmetry groups" como los llaman en algunos libros ingleses y americanos) y vamos a dar criterios para saber qué grupo de simetrías tiene un arabesco que nos encontremos. Lo haremos ayudados por figuras inspiradas en arabescos de la Alhambra. Los grupos de simetrías de arabescos o grupos cristalográficos planos son la versión bidimensional de los grupos de simetría de las redes cristalinas de los minerales (grupos cristalográficos tridimensionales), de aquí el nombre de cristalográficos y muchas de las particularidades de su notación, como explicaremos a continuación.

Primeras observaciones sobre la notación.

Utilizaremos la notación cristalográfica universal (que es la difundida por la **International Union of Crystallography**). La notación consta primero de una letra que es *p* o *c*, que tiene que ver con cómo son las traslaciones del grupo de simetrías. Hay sólo dos grupos que tienen la letra *c* y explicaremos el significado de esta letra algo mejor cuando lleguemos a ellos. Después de la letra *p* o *c* viene un número que indica el orden máximo de las simetrías que son rotaciones. El *orden de una rotación* es el número mínimo de veces que tenemos que repetir ésta para obtener el movimiento identidad. Las rotaciones no tienen porqué tener orden finito, es decir no siempre después de repetir varias veces una rotación llegamos a la identidad, pero las rotaciones que son simetrías de arabescos sí tienen esta propiedad. Además una de las propiedades más importantes de las rotaciones de los grupos cristalográficos planos es que deben forzosamente tener órdenes 2, 3, 4 ó 6, este hecho se conoce como la *restricción cristalográfica*. Dicho con otras palabras las rotaciones de un grupo cristalográfico pueden tener únicamente los siguientes ángulos:

- 180º, rotaciones de orden 2,
- 120º, 240º, rotaciones de orden 3,
- 90º, 270º, rotaciones de orden 4,
- 60, 300º, rotaciones de orden 6.

Obsérvese que si un grupo de simetrías contiene una rotación de 120º también tiene una rotación de 240º (basta repetir dos veces la primera rotación). Si tiene rotaciones de 90º, también tiene de 270º y de 180º, es decir si tiene simetrías de orden 4 también hay automáticamente simetrías de orden 2 con los mismos centros que tienen las simetrías de orden 4. Del mismo modo si hay rotaciones de 60º también hay rotaciones de 120º, 180º, 240º y 300º. Una rotación que no se obtiene al repetir varias veces otra rotación de mayor orden se llamará *rotación esencial*.
A continuación del número suele venir una letra *m* o una letra *g*. La letra *m* indica que el grupo de simetrías tiene *reflexiones* ("mirrors", espejos en inglés) y la letra *g* indica que hay *reflexiones sesgadas* cuyos ejes no son ejes de reflexiones del grupo cristalográfico;

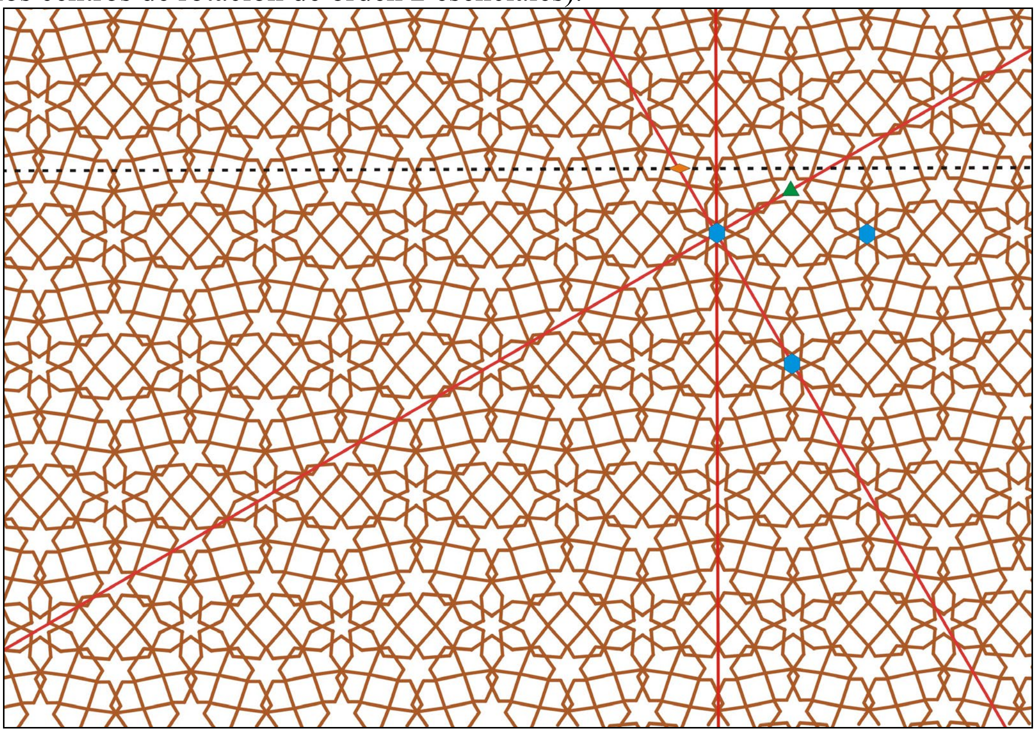
las reflexiones sesgadas de este tipo serán llamadas por nosotros *reflexiones sesgadas esenciales* (*g* viene de “glide reflection”, reflexión sesgada en inglés).

Clasificación de los grupos cristalográficos mediante ejemplos inspirados en los arabescos de la Alhambra.

Supongamos que queremos analizar el grupo de simetrías de un arabesco. La primera tarea es comprobar que la figura sugiere simetrías que son traslaciones y que las simetrías que son traslaciones se obtienen como producto de dos traslaciones con vectores no paralelos. Es decir, que nos encontramos ante una figura cuyo grupo de simetrías es un grupo cristalográfico plano.
En primer lugar nos vamos a fijar en el orden máximo que tienen las rotaciones que son simetrías del arabesco; dependiendo de tal orden tenemos cinco casos:

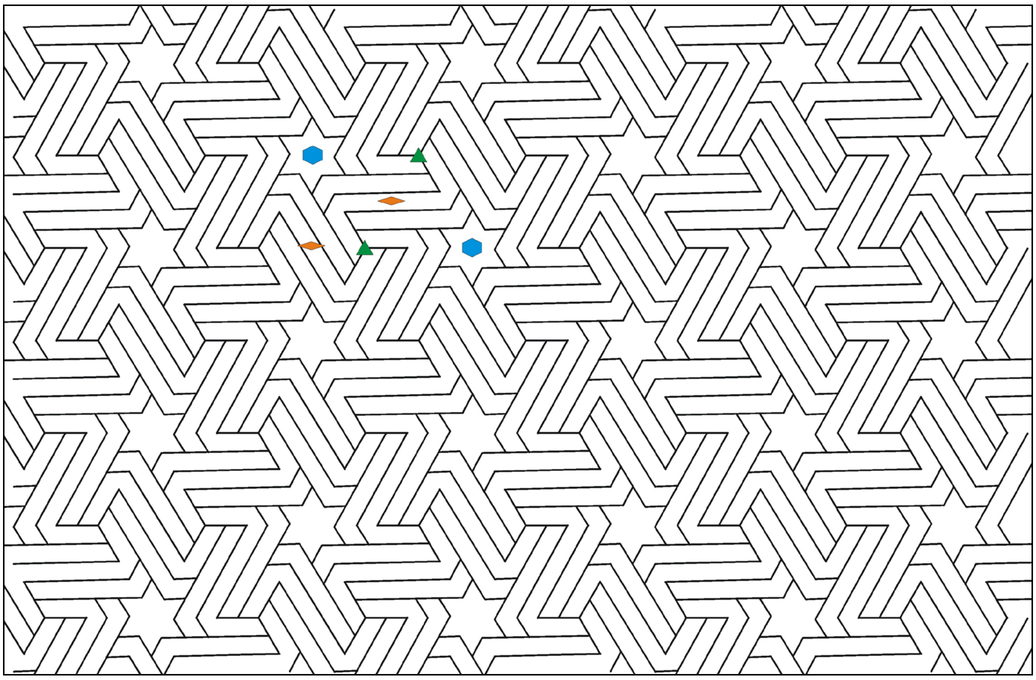
1. Primero supondremos que nuestro arabesco tiene simetrías que son **rotaciones de orden 6**, es decir hay simetrías que son rotaciones de 60º. Ahora hay dos posibilidades.

- **Hay** simetrías que son **reflexiones**. Entonces el grupo de simetrías del arabesco se dice que es un grupo cristalográfico del tipo **p6m** o bien simplemente que es el grupo p6m, la *m* aparece precisamente por tener reflexiones. El arabesco que muestra la figura siguiente tiene grupo de simetrías p6m y hemos señalado tres de los ejes de simetría (rectas rojas) y tres de los centros de rotación de orden 6 (hexágonos azules). También hay centros de rotaciones de órdenes 3 y 2, distintos de los centros de rotaciones de orden 6, es decir esenciales (hemos marcado uno de orden 3 con un triángulo verde y uno de orden dos con un rombo naranja), aunque no hace falta encontrarlos para distinguir este grupo cristalográfico de otros es instructivo observarlos. Hay ejes de reflexión que pasan por todos los centros de rotación y también hay ejes de reflexión sesgada esenciales (y que solo pasan por los centros de rotación de orden 2 esenciales).



p6m

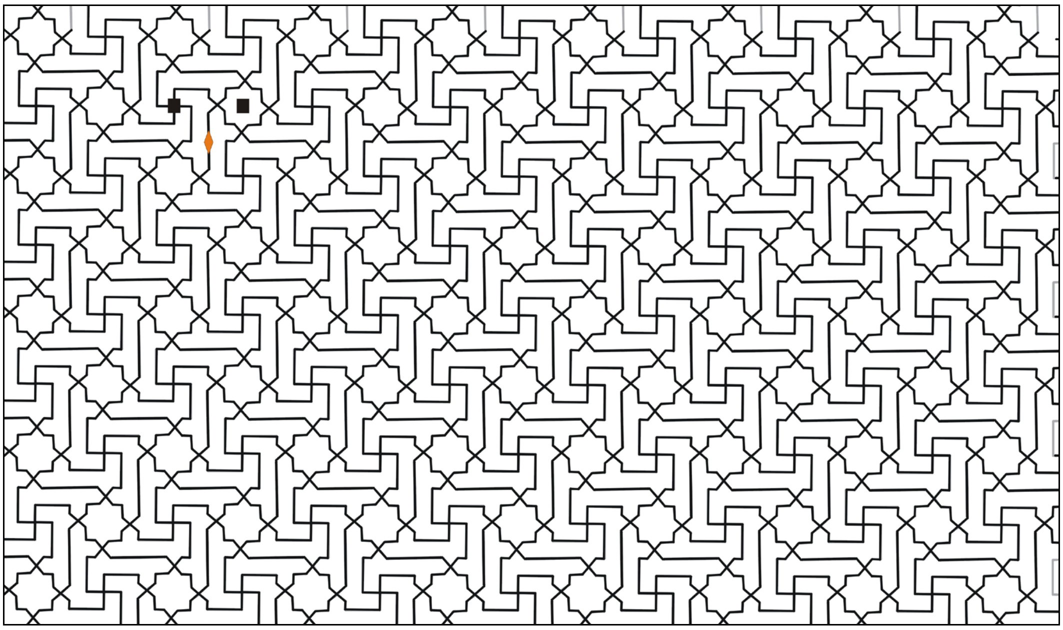
- **No hay** simetrías que sean **reflexiones**. Entonces el grupo cristalográfico se llama **p6**. Obsérvese que también hay centros de rotación esencial de órdenes 2 y 3, que no son centros de rotación de orden 6. Hemos señalado un par de centros de rotación de orden 6 con hexágonos azules, dos centros de rotación esencial de orden 3 con dos triángulos verdes y dos centros de rotación esencial de orden dos con dos rombos naranjas.



p6

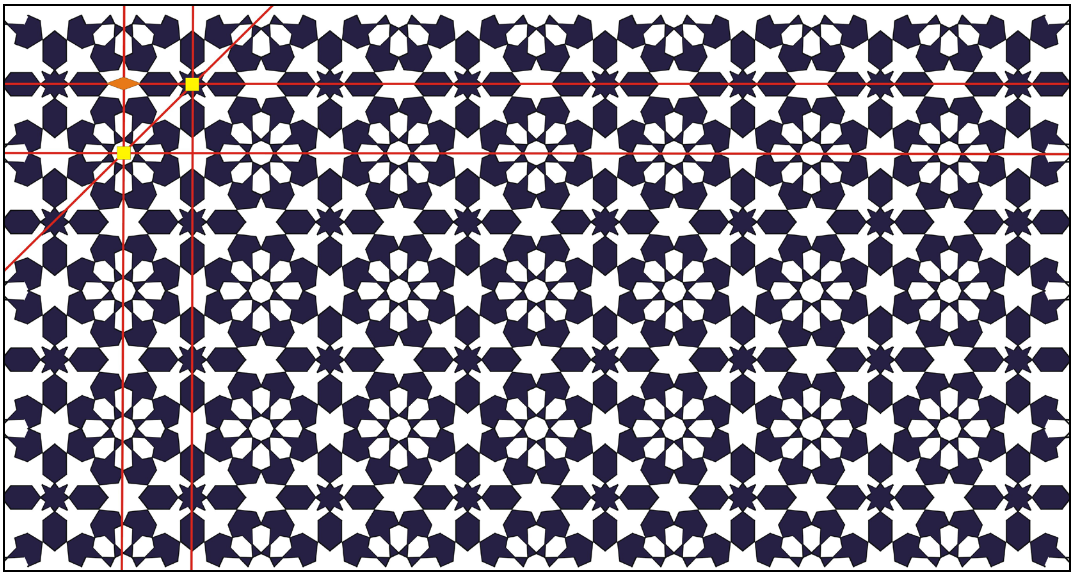
2. El **máximo orden de las rotaciones** que son simetrías del arabesco es **4**. Es decir, el arabesco tiene simetrías que son rotaciones de 90º y no hay rotaciones de orden 6. En este tipo de arabescos se verifica que tampoco hay simetrías que sean rotaciones de orden 3. Por tanto las rotaciones del grupo cristalográfico son de órdenes 2 ó 4. En todos los grupos cristalográficos con esta propiedad aparecerá un 4 en la notación.

- **No hay** simetrías que sean **reflexiones**. Entonces el grupo cristalográfico se llama **p4**. Hay dos tipos de centros de rotaciones de orden 4 (hemos marcado uno de cada tipo con un cuadrado negro) y también hay centros de rotaciones esenciales de orden 2 (hemos marcado uno, pues todos son del mismo tipo, con un rombo naranja).



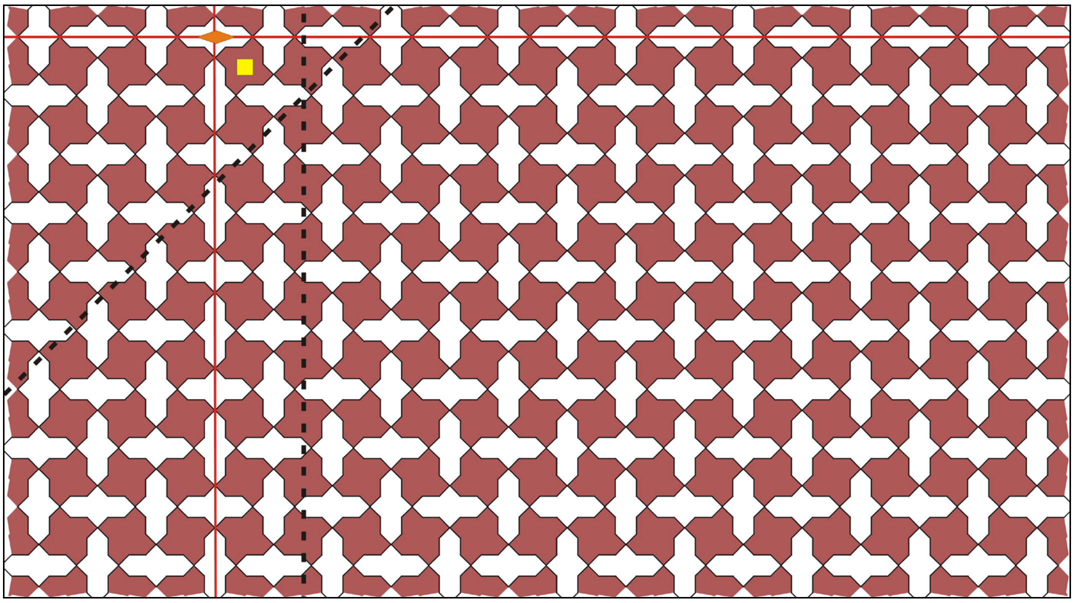
p4

- Si el arabesco tiene simetrías que son **reflexiones cuyos ejes pasan por todos los centros de rotación**, entonces el grupo de simetría se denomina **p4m**. La *m* de la notación de este grupo aparece por tener reflexiones. Obsérvese que en este grupo no hay reflexiones sesgadas esenciales.



p4m

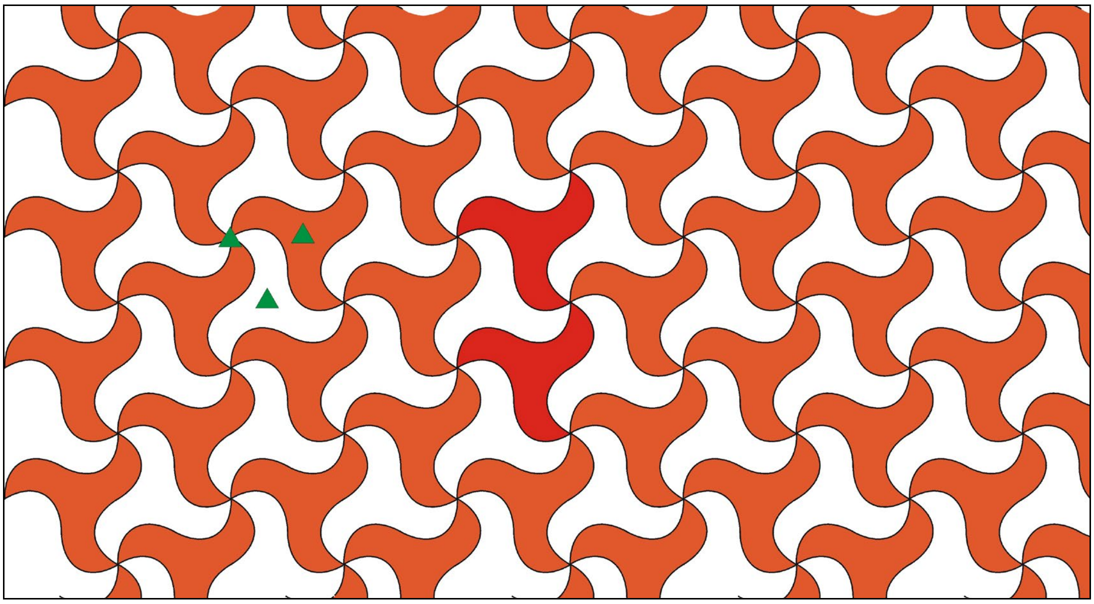
- Por último, para arabescos con rotaciones de orden 4, si nuestro arabesco tiene **reflexiones** y algunos **centros de rotación por los que no pasa ningún eje de reflexión**, entonces el grupo cristalográfico se denomina **p4g**. Obsérvese que los arabescos cuyo grupo de simetrías es de este tipo también poseen simetrías que son reflexiones sesgadas esenciales, es decir cuyos ejes no son ejes de reflexión; éste es otro medio para distinguir p4g de p4m. Por esto aparece la *g* en la notación de este grupo.



p4g

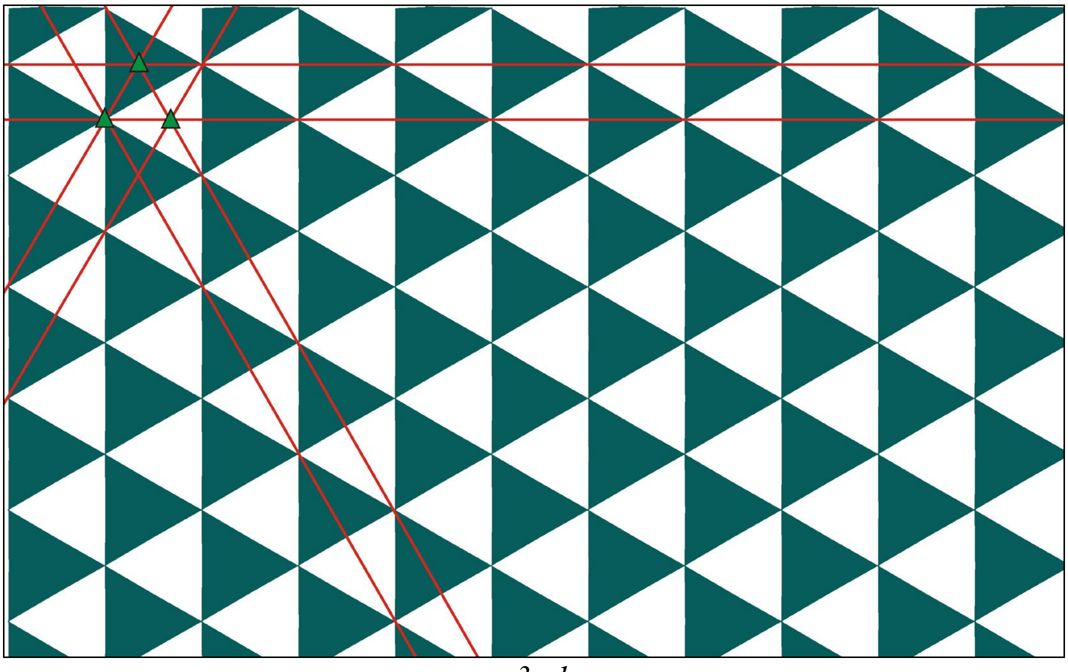
3. El **máximo orden de las rotaciones** que son simetrías del arabesco es **3**. Es decir el arabesco tiene simetrías que son rotaciones de orden 3 (ángulo 120º o 240º) y no tiene rotaciones de orden 6. En todos los grupos de este tipo aparecerá un 3 en la notación. En todos estos grupos no hay rotaciones de orden 4 ni 2.

- **No** hay simetrías que son **reflexiones**. El grupo cristalográfico se denomina **p3**. Hay tres tipos distintos de centros de rotaciones de orden 3 y no hay otro tipo de rotaciones. Hemos señalado un centro de cada uno de los tipos con un triángulo verde.



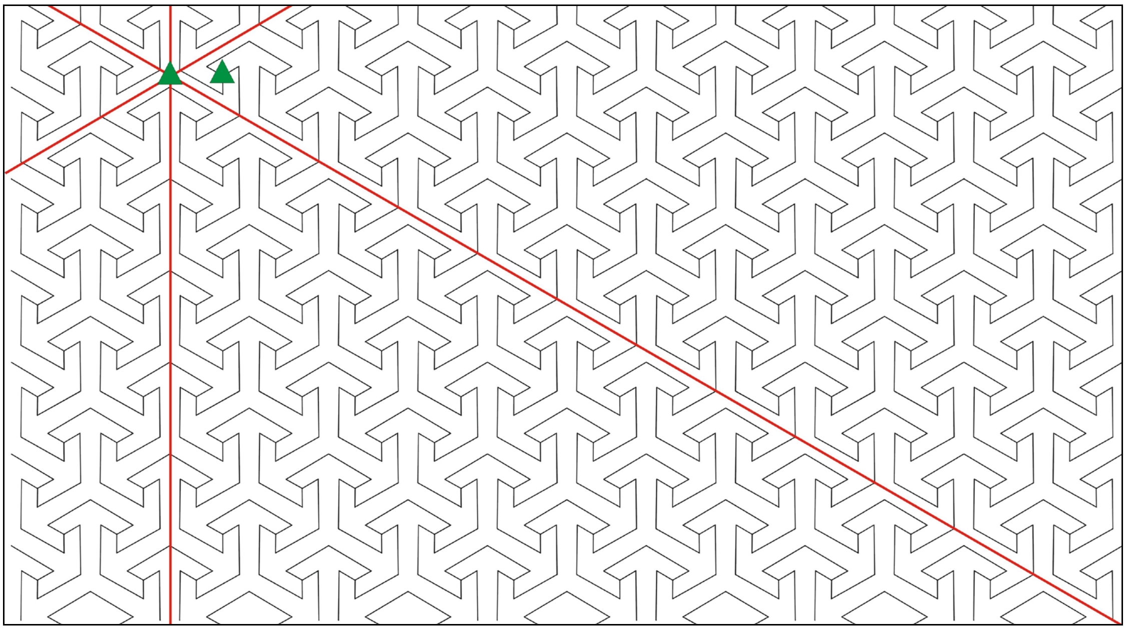
p3

- Hay **reflexiones** y **los ejes de reflexión pasan por todos los centros de rotación**. Como en el caso anterior hay cuatro tipos distintos de centros de rotación de orden tres. El grupo se llama **p3m1**.



p3m1

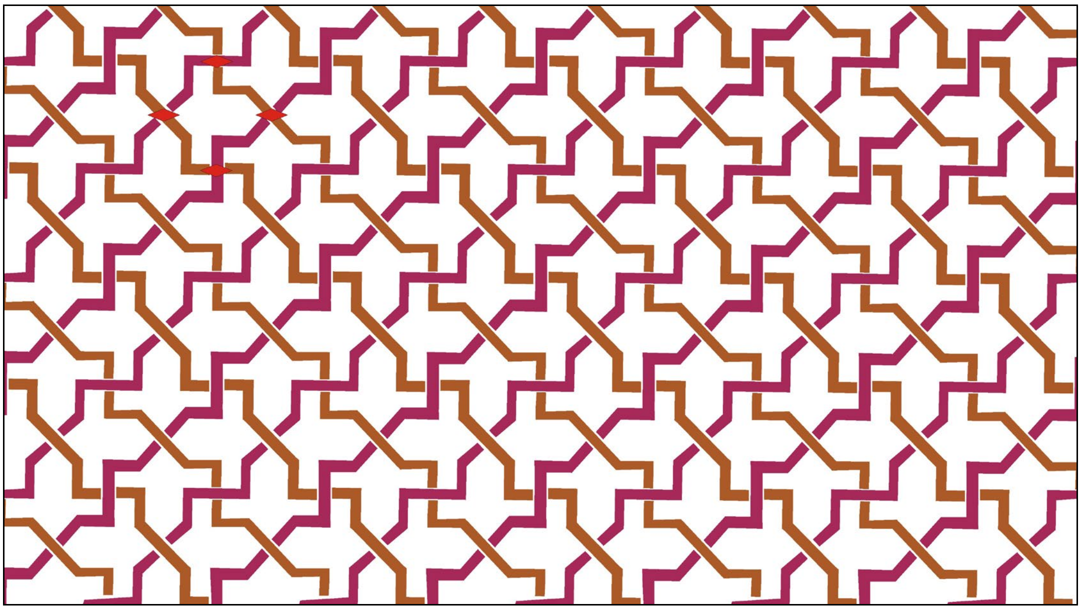
- Hay arabescos, como el de la figura siguiente, donde hay **reflexiones** y centros de rotación de orden tres que están sobre ejes de reflexión y **centros de rotación** de orden tres por los que **no pasa** ningún **eje de reflexión**. El grupo cristalográfico se denomina **p31m**.



p31m

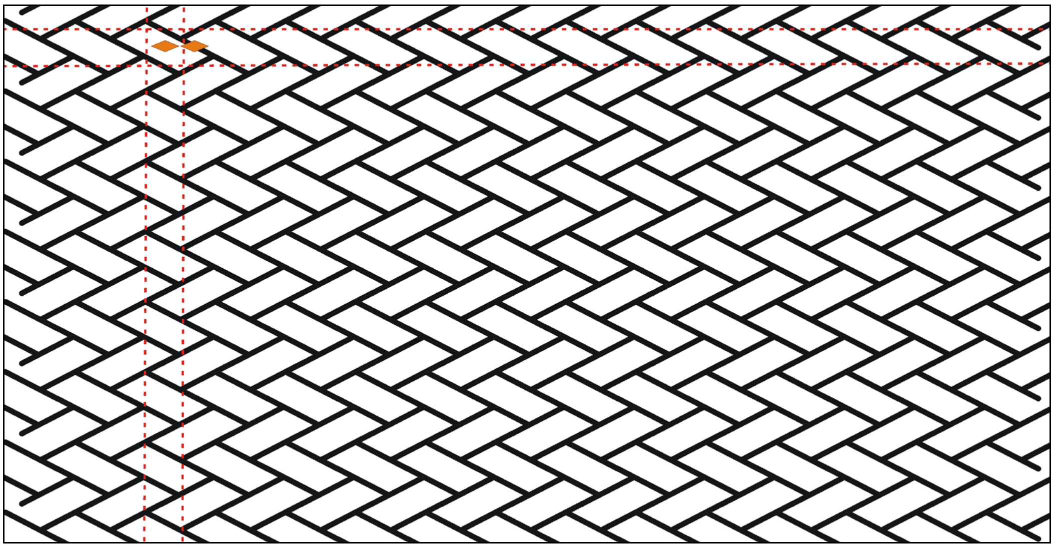
4. El **máximo orden** de las **rotaciones** que son simetrías del arabesco es **2**. Es decir, el arabesco tiene simetrías que son rotaciones de 180º y no hay rotaciones de otro tipo.

- Si el arabesco no tiene **nada más que rotaciones** el grupo cristalográfico se denomina **p2**. Obsérvese que hay cuatro tipos de centros de rotación de orden 2 (en la figura hemos señalado uno de cada tipo con un rombo naranja).



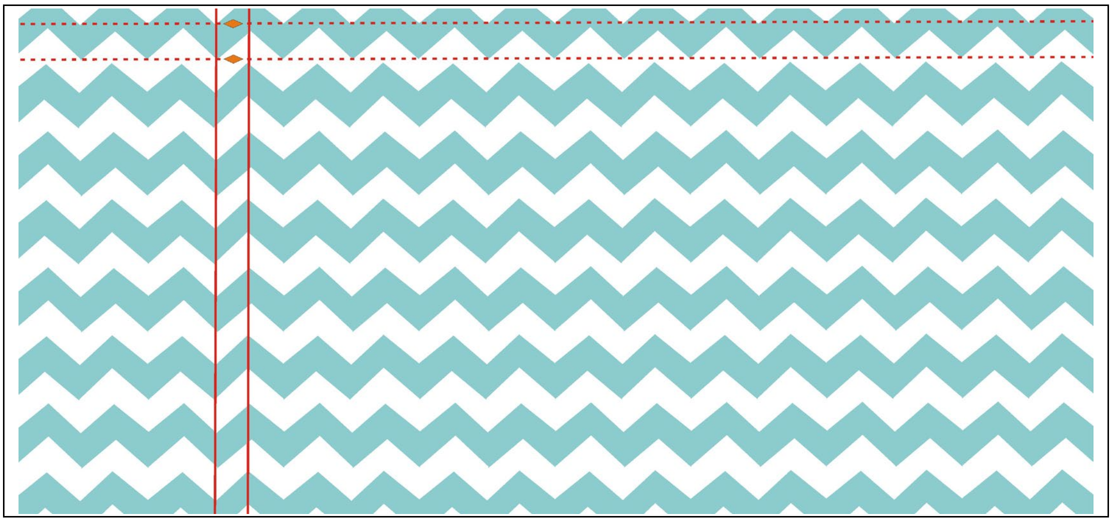
p2

- Supongamos ahora que el arabesco **no** tiene **reflexiones** pero **sí** tiene **reflexiones sesgadas**. Entonces el grupo de simetrías es el grupo cristalográfico **pgg**. Obsérvese que las reflexiones sesgadas tienen sus ejes en dos familias de rectas paralelas (de ahí las dos *g*). Las rectas de una familia de ejes de reflexiones sesgadas son perpendiculares a las rectas de la otra. Hay dos tipos de centros de rotación de orden 2.



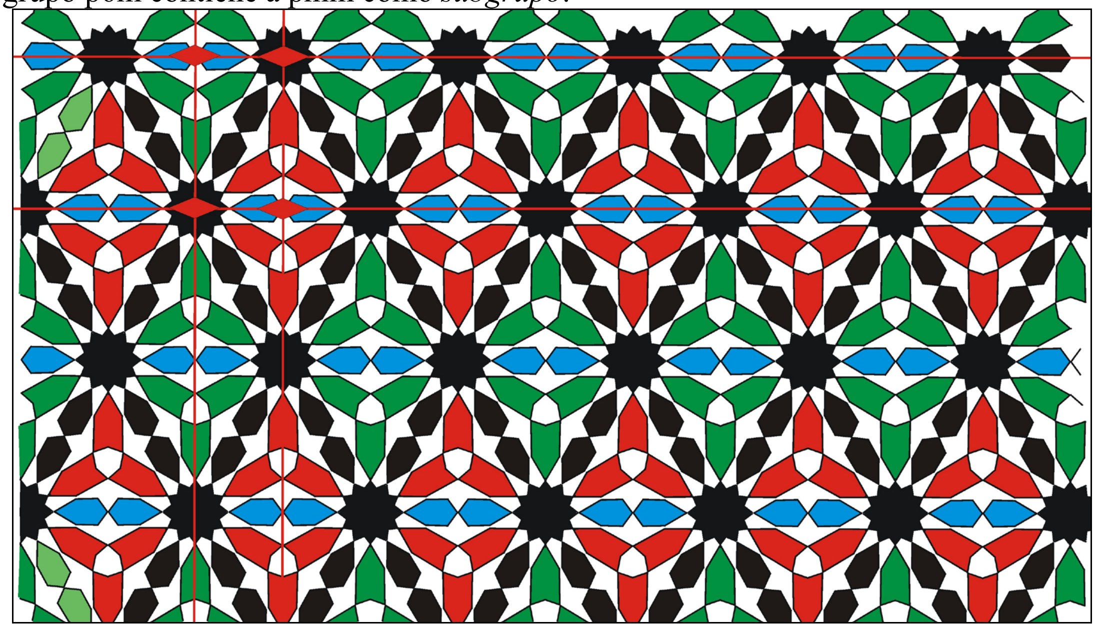
pgg

- El arabesco **tiene** simetrías que son **reflexiones** y **todos sus ejes son paralelos**. El grupo cristalográfico es **pmg**. Obsérvese que hay reflexiones sesgadas esenciales y cuyos ejes son perpendiculares a los ejes de reflexión. Al tener reflexiones y reflexiones sesgadas esenciales aparecen en la notación *m* y *g*. Como todas las reflexiones tienen sus ejes paralelos aparece una única *m* en la notación. Hay dos tipos de centros de rotación de orden 2.



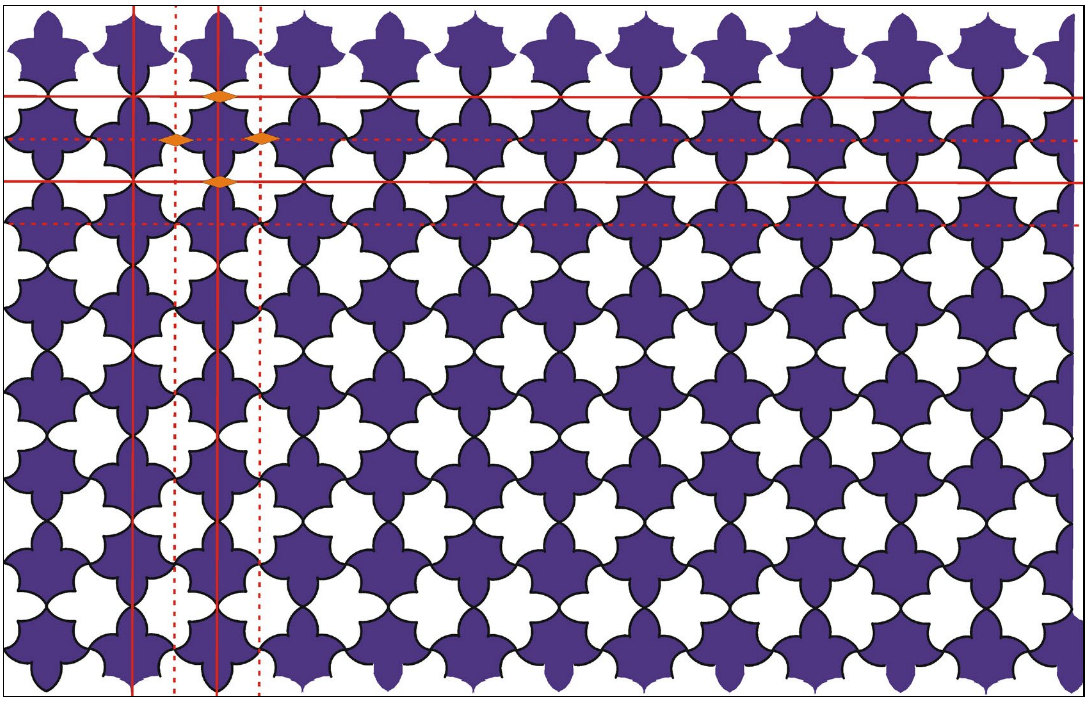
pmg

- En el arabesco de la figura siguiente por **todos los centros de orden dos pasan ejes de reflexión**. El grupo cristalográfico se denomina **pmm**. Los ejes de las reflexiones forman una cuadrícula rectangular y los centros de rotación de orden 2 están precisamente en los nodos de la cuadrícula. Por tanto las reflexiones tienen ejes que están en dos familias de rectas paralelas, cada recta de una familia es perpendicular a las rectas de la otra familia. Como hay dos direcciones de ejes de reflexión aparecen las dos *m* en la notación.
  Atención al color, como se ve "rompe" simetrías, si en el arabesco siguiente ignoramos la coloración el grupo cristalográfico de simetrías sería p6m, es decir, el grupo p6m contiene a pmm como *subgrupo*.



pmm

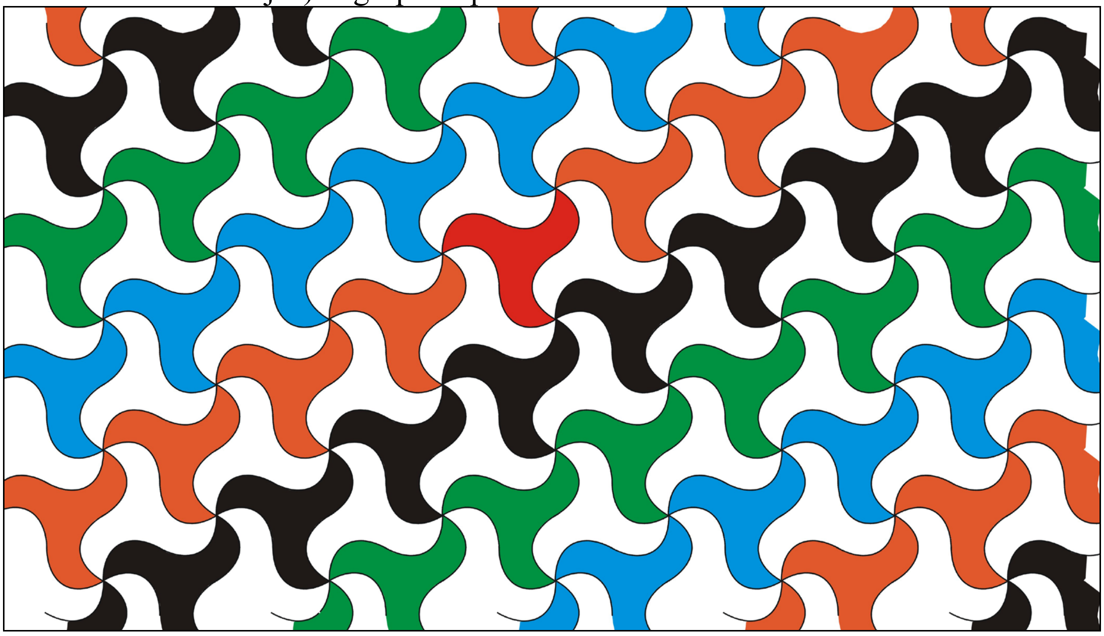
- En el arabesco siguiente hay **reflexiones cuyos ejes están en dos direcciones** que son perpendiculares como en el caso anterior, sin embargo **no pasan por todos los centros de rotación** de orden 2. El grupo cristalográfico se denomina **cmm**. Otra característica que distingue este grupo es la existencia de dos direcciones perpendiculares de ejes de reflexiones sesgadas esenciales además de las dos direcciones perpendiculares de ejes de reflexiones.
  La letra *c* hace alusión a cómo son las traslaciones del grupo. Si consideramos un punto y después todos sus transformados por las traslaciones del grupo cmm obtenemos los nodos de una red formada por rombos o bien podemos describir tal conjunto de puntos como los nodos de una cuadrícula por rectángulos donde añadimos los centros de dichos rectángulos. Por tener que añadir tales centros, a este tipo de configuración de puntos se le llama red centrada, de ahí la *c*.



cmm

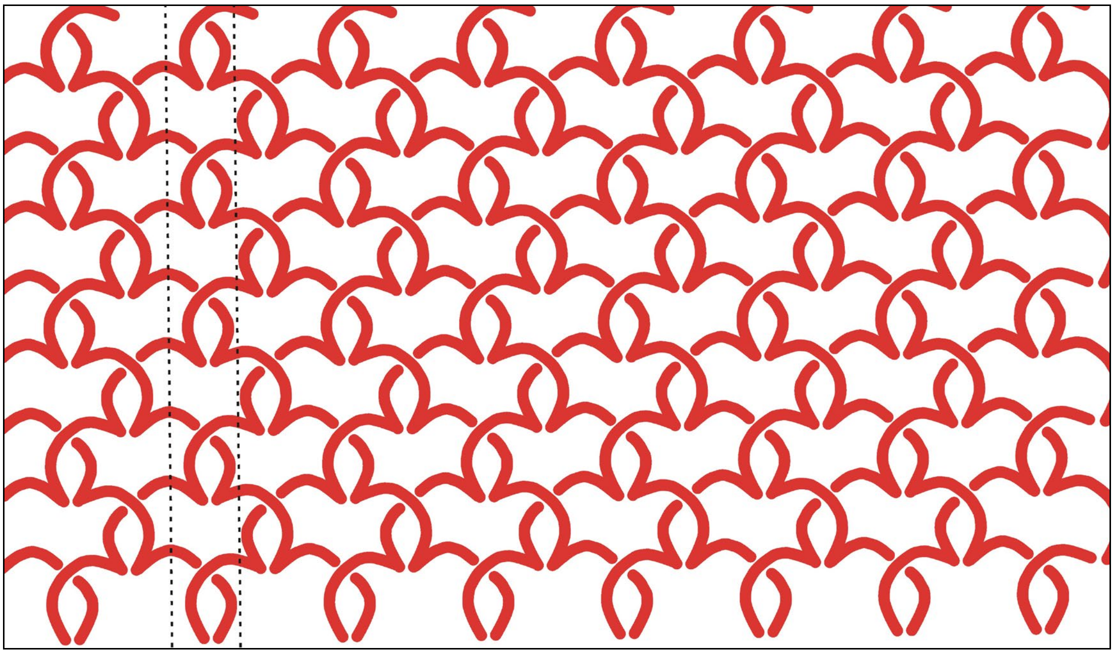
5. Supongamos ahora que el arabesco **no posee** ninguna simetría que sea **rotación**.

- **No** hay simetrías que sean **reflexiones ni reflexiones sesgadas**. Entonces el grupo cristalográfico es **p1** sólo contiene traslaciones. En el arabesco de la figura la coloración impide todas las simetrías salvo las traslaciones. Con dos colores ya vimos que el grupo de simetrías era p3 y sin ninguna coloración (sólo las líneas de contorno de los azulejos) el grupo es p6.



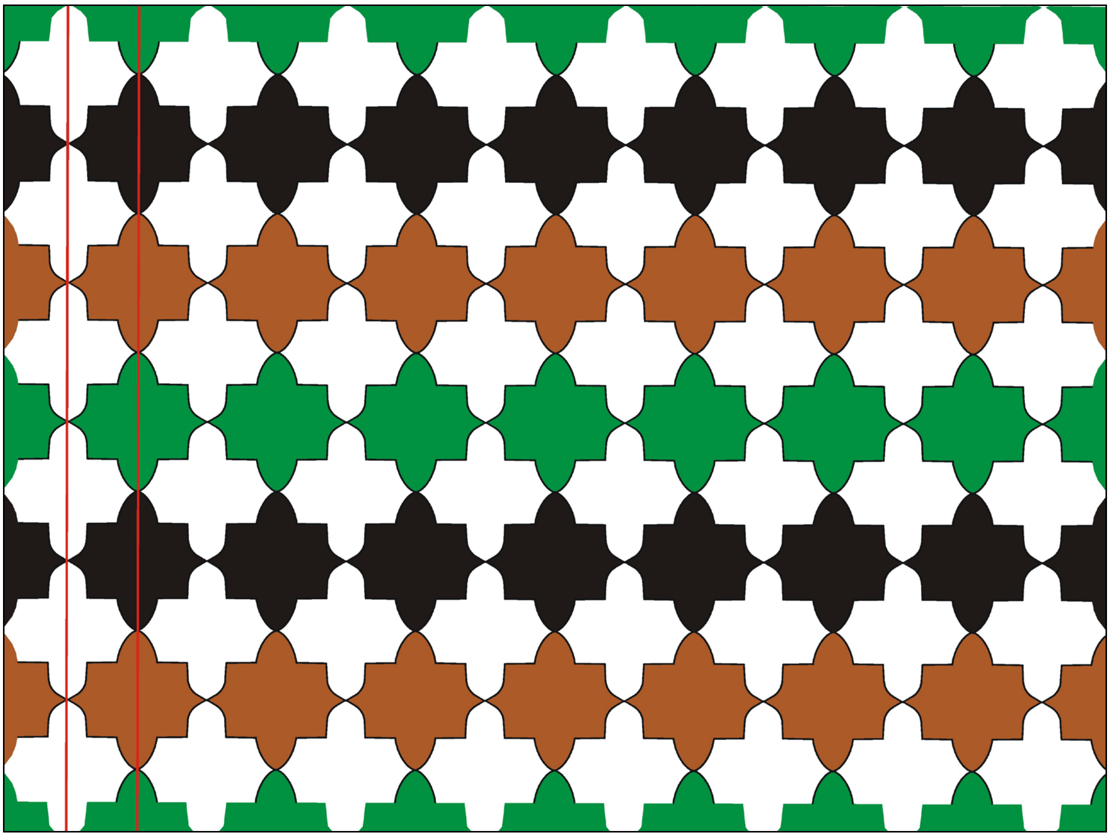
p1

- **No** hay **reflexiones** pero **sí** hay **reflexiones sesgadas**. El grupo cristalográfico es **pg**. Los ejes de las reflexiones sesgadas son todos paralelos.



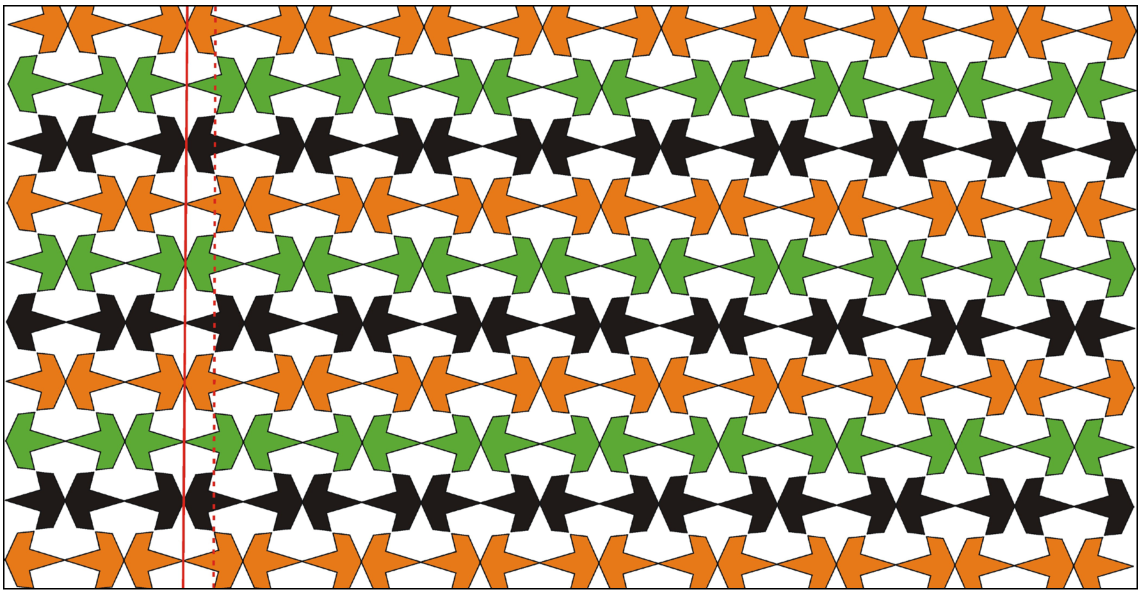
pg

- Si en el arabesco **hay reflexiones** pero **no reflexiones sesgadas esenciales** entonces se dice que el grupo es **pm**. Todas las reflexiones tienen ejes paralelos. Obsérvese como en la figura siguiente la coloración es esencial en el estudio de las simetrías del arabesco.



pm

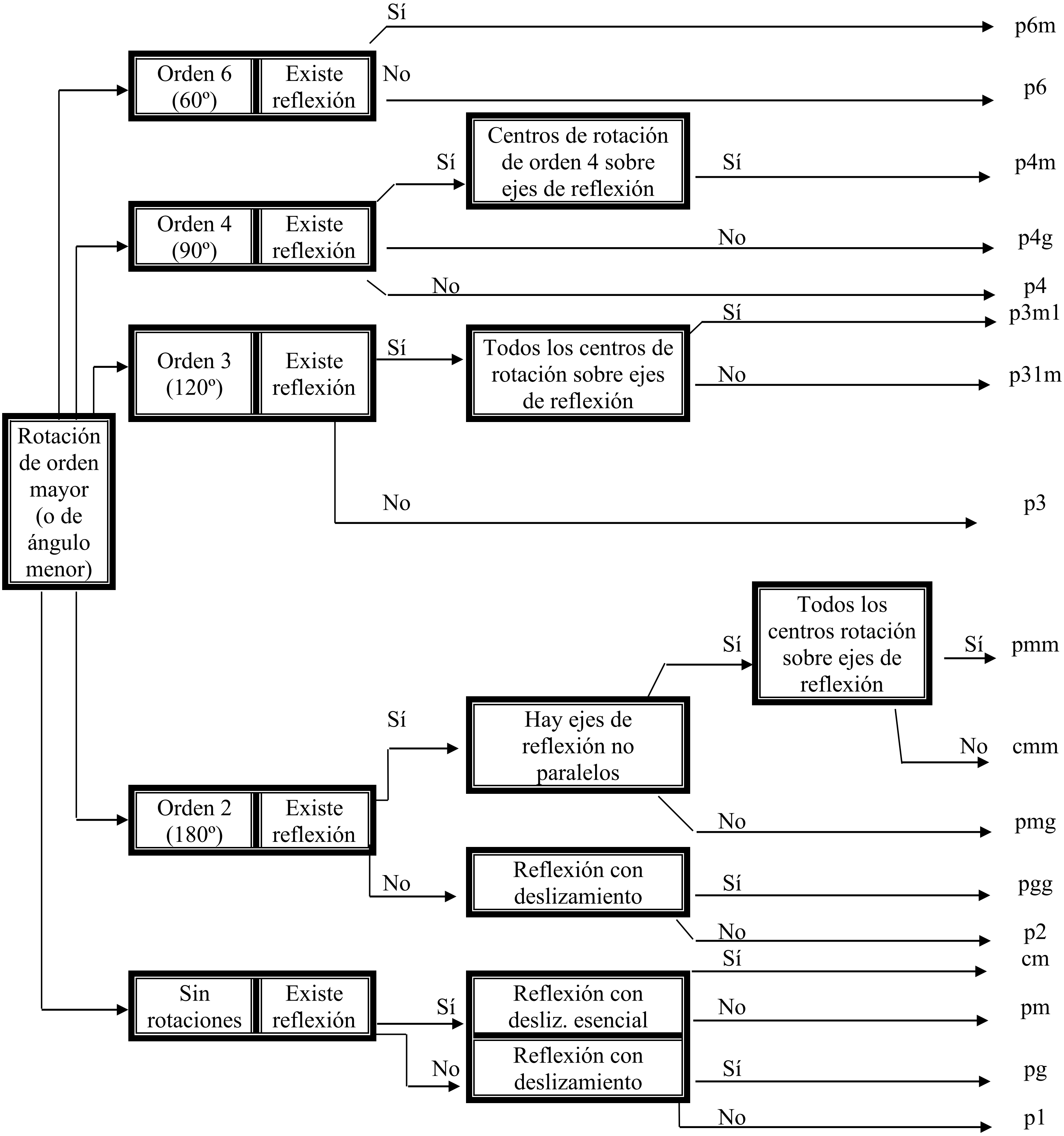
- Finalmente si en el arabesco **hay reflexiones** y **reflexiones sesgadas esenciales** con ejes paralelos, el grupo es del tipo **cm**. Las traslaciones de este grupo dan lugar a una red centrada por lo que aparece la *c* en la notación.



cm

Un algoritmo para clasificar los grupos cristalográficos planos.

En el siguiente algoritmo resumimos muy esquemáticamente algunas de las características esenciales para clasificar los grupos de simetrías de arabescos.



Un poco sobre el contexto histórico-matemático.

La clasificación y descripción de los grupos cristalográficos planos se debe a E. S. Fedorov (el gran cristalógrafo ruso) a finales del siglo XIX. Según H. S. M. Coxeter, Fedorov señala que 16 de los 17 grupos habían sido descritos por C. Jordan en 1869 y el que faltaba fue reconocido por L. Sohncke en 1874 (pero no presentó en su trabajo tres de los ya conocidos). Nosotros aquí, y dado que ya nos hemos extendido demasiado en estas notas, no vamos a presentar una demostración de la clasificación de los 17 grupos cristalográficos. La demostración es sencilla y se puede hacer sin herramientas sofisticadas pero pagando el precio de ser bastante laboriosa. Con técnicas de grupos y álgebra lineal la demostración es rápida y sencilla. Sorprendentemente con técnicas topológicas también es posible llegar a esta clasificación (es sorprendente porque la Topología es una parte de la Geometría que estudia propiedades que parecen estar muy lejos de los grupos de movimientos, que son transformaciones que conservan las distancias, y la distancia es una propiedad geométrica pero no topológica).
Algo que es importante reseñar es que el hecho de existir exactamente 17 grupos cristalográficos es consecuencia del espacio geométrico donde se está trabajando. Por ejemplo, el axioma V de Euclides de la geometía plana, que es tan controvertido y que la demostración de su independencia relativa dio lugar a la geometría hiperbólica o mejor a las geometrías no euclídeas, es esencial para la demostración de la clasificación en 17 grupos. Así en geometría hiperbólica hay infinitos grupos cristalográficos bidimensionales. Los grupos cristalográficos esféricos son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos y de las pirámides y bipirámides (que también son infinitos).
Los grupos cristalográficos tridimensionales son una generalización a dimensión tres de los del plano. Su importancia reside en que son los grupos de simetría de las disposiciones de las moléculas en los cristales de los minerales. Hay 230 de tales grupos y fueron clasificados por Fedorov e independientemente por A. Schoenflies (matemático alemán), a finales del siglo XIX. Es posible generalizar a otras dimensiones mayores los grupos cristalográficos euclídeos y D. Hilbert (en 1900) en su famosa lista de problemas para el siglo XX, preguntó si su número sería finito en todas las dimensiones. La respuesta es sí y fue dada por el matemático alemán L. Bieberbach (en 1910). Más adelante se han dado algoritmos para conseguir los grupos cristalográficos en dimensiones mayores que 3 (Zassenhaus en 1948), pero su número se dispara y por ejemplo en dimensión 4 los grupos cristalográficos son 4783.

Bibliografía.

Una fuente importantísima de información sobre este tema es Internet, basta introducir en cualquier buscador como "Google" las palabras:

symmetry, crystallographic group, wallpaper group, tesselation, tiling, pattern,...

Dado el carácter efímero de las direcciones URL no vamos a arriesgarnos aquí a indicar ninguna.

En cuanto a libros y material impreso damos a continuación una selección muy personal de lo mucho que existe:

- Armstrong, M. A., Groups and symmetry, Springer Verlag, New York, 1988.
- Bezuska, S., Kenney, M., Silvey, L., Tesselations: The geometry of patterns, Creative Publications, Palo Alto, 1977.
- Coxeter, H. M. S., Fundamentos de Geometría, Ed. Limusa S. A., México, 1988.
- Duzhin, S. V., Chebotarevsky, B. D., Transformation groups for beginers, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004.
- Grümbaum, B., Shephard, G. C., Tilings and Patterns, W. H. Freeman and Company, New York, 1987.
- Hargittai, I., Hargittai, M., Symmetry, an unifying concept, Shelter Publications Inc., Bolinas, California, 1994.
- Johnson, D. L., Symmetries, Springer Verlag, London, 2001.
- Martin, G. E., Transformation Geometry, an introduction to symmetry. Springer Verlag, New York, 1982.
- Montesinos, J. M., Caleidoscopios en la Alhambra, Memorias de la Real Academia de Ciencias, Físicas, Exactas y Naturales de Madrid, 23, Madrid, 1987.
- Ramírez, A., Usón, C., Los 17 grupos cristalográficos en el arte mudejar aragonés, UNED de Aragón - Centro de estudios mudéjares, Barbastro, 2002.
- Schattschneider, D., The plain symmetry groups. Their recognition and notation, American Mathematical Monthly, 85 (1978) 439-450.
- Senechal, M., Crystalline Symmetries, an informal introduction, Adam Hilger, Boston, 1990.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, La Alhambra, Número especial de la revista Epsilon, SAEM Thales, Granada, 1995.
- Washburn, D. K., Crowe, D. W., Symmetries of culture: theory and practice of plane pattern analysis, Seattle, University of Wasington Press, Wasington, 1988.
- Weyl, H., Symmetry, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1952.